MINISTERE D'EDUCATION ET DE FORMATION
PROGRAMME DE FORMATION INGENIEURS D'EXELLENCE AU VIETNAM

CONCOURS D'ORIENTATION
Session 2014
EPREUVE : MATHEMATIQUES
Durée: 180'

PARTIE A: ALGÈBRE

I. Soient E un $\mathbf{R}$ - espace vectorielle de dimension finie et $\mathcal{L}(E)$ l'espace de endomorphismes de E.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ on note $V_f = \{g \in \mathcal{L}(E) | g \circ f = f \circ g\}$.

1) Montrer que V_f est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$.
2) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E tel que Ker(p) et Im(p) sont stables par g. Montrer que $g \in V_p$.
3) Déterminer la dimension de l'espace V_f dans le cas dim($\boldsymbol{E}$)= 3 et f est un endomorphise de E tel que rank(f) = 1.
4) Soit h un endomorphise diagonalisable de E tel que Sp(h) ={2014}. Peut-on dire que $V_h = \mathcal{L}(E)$?
5) Trouver un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ tel que $V_h = \mathcal{L}(E)$ quand dim(E)=3.

II. Dans l'espace euclidienne $\mathbf{R}^3$ avec le produit scalaire canonique, étant donnés 6 vecteurs:

$$a_1(1,2,1); a_2(-1,2,4); a_3(1,-3,-5); v_1(2,1,-1); v_2(2,-1,-4); v_3(-3,1,5).$$

Soit φ un endormorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que $\varphi(a_i) = v_i \quad (i = 1;2;3)$

1) Justifier que φ est un endomorphisme orthogonale.
2) Montrer que $Ker(\varphi + Id_{\mathbf{R}^3})$ et $Ker(\varphi - Id_{\mathbf{R}^3})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{R}^3$.

PARTIE B : ANALYSE

I. Considérer la fonction

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ & (x, y) \mapsto x^2 y^3 (1 - x - y) \end{aligned}.$$

On note $D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 4; 0 \leq x; 0 \leq y\right\}$

1) Déterminer les extrémums de f dans $\mathbf{R}^2$.
2) Déterminer les extrémums globales de f dans D.
3) Calculer $\iint_D f(x, y)dxdy$.

II. On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)}\quad xy' + ay = \frac{1}{1+x} \qquad (a \in \mathbf{R})$$

et l'intégrale dépendante de paramètre b ($b \in \mathbf{R}$)

$$\text{(I)}\quad \int_0^x \frac{t^{b-1}}{1+t}dt \qquad (0<x).$$

1) Pour quelles valeurs de b, l'intégrale (I) soit convergente? Dans le cas (I) converge, on pose $\varphi(x,b) = \int_0^x \frac{t^{b-1}}{1+t}dt$

2) Calculer $\varphi(x, \frac{1}{2})$

3) Trouver la solution développable en série entière (suivant les puissances de x) de (E). Déterminer le domaine de convergence de cette série. On note sa somme par $y_a(x)$.

4) Donner une relation entre $\varphi(x,a)$ et $y_a(x)$ quand $(x,a) \in (0,1)\times(0,+\infty)$.

PARTIE C: PROBABILITÉ

On suppose que la limite élastique des barres d'acier (kG/cm^2) fabriquées dans 3 usines A;B;C soit des variables aléatoires indépendantes , normales d'espérance mathématique 3600 et d'écart- type 1600; 2304; 2500 respectivement.
Une barre est défectueuse si la limite élastique est inférieure à 3450.

1) On prend par hasard une barre de chaque usine.Quelle est la probabilité que parmis 3 barres prises, ait au plus une barre défectueuse?
2) D'un lot de 500 barres dont 100 de A, 150 de B, et 250 de C, on choisit par hasard une barre. Quelle est la probabilité pour que la barre prise soit défectueuse?

(Dans le calcul on peut prendre $\phi(1.2) = 0.8944; \phi(1.5) = 0.9332; \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$)