

Thời gian làm bài: 180 phút

**Câu I.** (3 điểm)

- 1) Cho ma trận  $A = \begin{pmatrix} m & -7 & -5 \\ 10 & -7 & -7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  và véc tơ  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Tìm  $m$  để  $x$  là véc tơ riêng của ma trận  $A$ . Chéo hóa  $A$  với  $m$  vừa tìm được.

- 2) Cho ánh xạ tuyến tính  $f : P_2[x] \rightarrow P_2[x]$  với  $P_2[x]$  là không gian những đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2, biết ma trận của  $f$  trong cơ sở  $E = \{x^2 + 2x, 2x^2 + 3x + 1, x - 2\}$  là  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Tìm một cơ sở và số chiều của  $Im f$  và  $Ker f$   
 b) Ánh xạ  $f$  có chéo hóa được không? Giải thích.

**Câu II.** (1.5 điểm) Cho hàm hai biến

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

- 1) Khảo sát tính liên tục của hàm số  $f(x, y)$ .  
 2) Khảo sát tính khả vi của hàm số  $f(x, y)$  tại điểm  $(0, 0)$ .  
 3) Tính  $I = \iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy$ , với  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ .

Câu III. (2 điểm)

1) Tích tích phân  $I = \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ , với  $a > 0, b > 0$ .

2) Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi lũy thừa sau  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+3}$

Câu IV. (1.5 điểm) Cho phương trình vi phân

$$y'' + y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi \\ \pi e^{\pi-x}, & x > \pi \end{cases}$$

1) Tìm nghiệm cực đại của phương trình trên.

2) Tìm nghiệm cực đại thỏa  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ .

Câu V. (2 điểm) Ba công nhân cùng sản xuất một loại sản phẩm, xác suất để người thứ nhất và người thứ 2 làm ra chính phẩm là 0,9. Còn xác suất người thứ 3 làm ra chính phẩm là 0,8. Một người trong số đó làm ra 8 sản phẩm, thấy có 2 phế phẩm. Tìm xác suất trong 8 sản phẩm tiếp theo cũng do người đó sản xuất sẽ có 6 chính phẩm.