10

BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO KỸ SƯ CHẤT LƯỢNG CAO

P.F.I.E.V.

ĐỀ THI PHÂN NGÀNH NĂM 2010

MÔN THI: TOÁN VÀ XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Thời gian làm bài: 180 phút

Phần I: Đại số

Cho E là $\mathbb{K}$-không gian vectơ ; f là một tự đồng cấu, p là một phép chiếu của E.

1. Chứng minh rằng $p \circ f = f \circ p$ khi và chỉ khi $\mathrm{Ker}(p)$, $\mathrm{Im}(p)$ đều ổn định với f.

2. Xét trường hợp $E = \mathbb{R}^3$.

Giả sử ma trận của f trong cơ sở chính tắc là $\begin{pmatrix} -5 & -6 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.a. Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f.

2.b. Đặt $G=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y=0\}$.

Gọi H là không gian con sinh bởi véctơ (-3;2;1) và p là phép chiếu lên G theo phương H.

Có thể khẳng định $p \circ f = f \circ p$ được không? Tại sao?

2.c. Tìm đa thức đặc trưng của ánh xạ $(f + Id_E)^{2010}$.

Phần II: Xác suất

Có hai khối lập phương A và B cân đối và đồng chất. Khối A có 1 mặt màu đỏ, 5 mặt còn lại màu xanh. Khối B có 2 mặt đỏ, 4 mặt xanh.

Trò chơi tiến hành theo phương thức sau: Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất. Nếu được mặt sấp, thì gieo khối A, ngược lại thì gieo khối B. Nếu xuất hiện mặt đỏ thì người chơi thắng, ngược lại thì người chơi thua.

1. Tính xác suất để người chơi thắng trong 1 lần chơi.

2. Trung bình trong 100 lần chơi, người chơi thắng bao nhiêu lần?

3. Tính số lần chơi trung bình trong mỗi trường hợp sau:

3.a. Chơi liên tiếp cho đến khi thắng thì dừng.

3.b. Chơi liên tiếp cho đến khi thắng hoặc thua mất 10 Euro thì dừng. Biết rằng mỗi lần thua người chơi mất 1 Euro.

Phần III : Giải tích

Cho phương trình vi phân (E_λ) $\quad y''+\lambda xy'-y=-\frac{\pi}{2}, \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

và hàm số $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$(x,t)\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} & \text{khi } t\neq 0\\ x & \text{khi } t=0\end{cases}$$

Đặt $D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,1]$ và $f(x)=\int_0^{+\infty}F(x,t)dt$

1. *Xét phương trình vi phân* (E_λ)

Giả sử $y_\lambda(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda)x^n$ là nghiệm của (E_λ) trên khoảng I của $\mathbb{R}$.

1.a. Tìm biểu thức liên hệ giữa $a_{n+2}(\lambda)$ và $a_n(\lambda)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

1.b. Xác định bán kính hội tụ của chuỗi trên .

1.c. Tìm $a_n(0)$.

1.d. Chứng minh rằng $y_0(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Hãy biểu diễn c_1, c_2 theo $a_0(0)$ và $a_1(0)$.

2. *Xét hàm hai biến* F.

2.a. Xét sự liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và tìm giá trị lớn nhất của F trên D.

2.b. Chứng minh rằng $\frac{\pi^3}{32}-\frac{\pi^4}{384}(1-\frac{\pi}{4})\leq\iint_D F(x,t)dxdt\leq\frac{\pi^3}{32}$

3. *Xét hàm f*

3.a. Tìm miền xác định của *f.*

3.b. Chứng minh rằng $f\in C^1$ trên $\mathbb{R}$. Tìm $f'(0)$.

3.c. Chứng minh rằng $f\in C^2$ trên $\mathbb{R}^*$.

3.d. Chứng minh rằng với $x>0$ $f''(x)-f(x)=-\frac{\pi}{2}$.

3.e. Từ đó suy ra $f(x)$.

Ghi chú : 1. Sinh viên có thể sử dụng các kết quả sau mà không cần chứng minh.

* *Nếu X có phân bố nhị thức với hai tham số n và p (nghĩa là* $X\in B(n;p)$ *) thì E(X) = np.*

* *Nếu X có phân bố hình học với tham số p thì E(X) =* $\frac{1}{p}$.

* $\forall u\geq 0, u-\frac{u^3}{6}\leq\sin u\leq u$; $\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v}dv=\frac{\pi}{2}$.

2. Trong phần ***Giải tích*** *có thể sử dụng:*

- Phương pháp tích phân từng phần để trả lời câu ***3.c.***

-Kết quả câu ***1.d*** *và* ***3.b.*** *để trả lời câu* ***3.e.***

3.Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.