P . F . I . E . V

Kiểm tra phân ngành

02/07/2001

Môn Toán - Thời gian : 3 giờ

Bài toán

Phương trình Bessel cấp 0 : $xy'' + y' + xy = 0$ (B)

1. Vài kết quả tiên nghệm
   a. Trên những khoảng mở nào định lí Cauchy-Lipschitz (bản tuyến tính) áp dụng được ?
   b. Cho biết cấu trúc của tập hợp các nghiệm trên những khoảng này.
   c. Chứng minh rằng các nghiệm của (B) có đạo hàm mọi cấp trên các khoảng này.
   d. Chứng tỏ rằng toán tử $y \to xy'' + y' + xy$ biến đổi một hàm chẵn thành một hàm lẻ.
2. Các nghiệm khai triển được thành chuỗi nguyên ở lân cận của 0
   a. Chứng minh rằng (B) có vô số nghiệm khai triển được thành chuỗi nguyên ở lân cận của 0.
   b. Kí kiệu J_0 là nghiệm chẵn có giá trị bằng 1 tại 0. Kiểm chứng đẳng thức:

   $$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

3. Bây giờ ta tìm một nghiệm trên $\mathbf{R}_+^*$, không phụ thuộc tuyến tính vào J_0

   Đặt $y: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$

   $x \mapsto J_0(x) \times Ln(x) + z(x)$, trong đó z là ẩn hàm mới.

   a. Chứng minh rằng z là nghiệm của phương trình vi phân :

   $$xy'' + y' + xy = -2J_0'$$

   Để ý đến 1.d và tính chẵn của J_0', ta tìm z dưới dạng $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^{2n}$ .Tiếp đó đặt

   $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \cdot \frac{H_n}{2^{2n}}$. Xác định H_n và bán kính hội tụ của chuỗi nguyên.

   Kí hiệu K là tổng của chuỗi nguyên này

   b. Kí hiệu w là Wronskien của J_0 và K, $w(x) = \det\begin{bmatrix} J_0(x) & K(x) \\ J_0'(x) & K'(x) \end{bmatrix}$ Chứng minh rằng w thoả mãn một phương trình vi phân cấp một. Chứng tỏ rằng $w(x) = 1/x$.

4. Giải (B) trên R_+^*, R_-^* và R.

5. Dạng tích phân của J_0

   a. Đặt $L(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x.\sin(\theta))d\theta$. Chứng minh $J_0(x) = L(x)$ bằng hai cách:

      i. Chỉ ra rằng L có đạo hàm đến cấp hai và thoả mãn (B).

      ii. Khai triển trực tiếp L thành chuỗi nguyên.

   b. Từ đó suy ra rằng với $x \geq 0$, $J_0(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{x} \frac{\cos(u)}{\sqrt{x^2-u^2}}du$

Bài tập 1

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

1. Chứng tỏ rằng với mọi số thực λ, A — λI có hạng ít nhất là 2.
2. Xác định đa thức đặc trưng của A
3. A có chéo hoá được không ?
4. Xác định các không gian vectơ con của R^3 ổn định đối với tự đồng cấu có ma trận trong cơ sở chính tắc là A.
5. Chứng minh rằng giới hạn L của dãy $\left(\dfrac{A^n}{2^n}\right)_n$ tồn tại và hãy xác định nó. Mô tả toán tử tuyến tính chuẩn của R^3 có ma trận L trong cơ sở chính tắc.

Bài tập 2

Cho E là một không gian vectơ Euclide định hướng, B là một cơ sở trực chuẩn thuận, f là một ánh xạ tuyến tính sao cho $F = \mathrm{Mat}_B(f) = \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} 8 & 6 & -10 \\ -10 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & 5 \end{bmatrix}$. Chứng minh rằng Ker(f) trực giao với Im(f). Ý nghĩa hình học của f.