Ngày 24 tháng 6 năm 2002, thời gian làm bài: 180 phút

Giải tích

Ta xét chuỗi lượng giác $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n.\sin(nx)$ trong đó $(b_n)_{n>0}$ là một dãy số thực giảm đến 0. Các vấn đề về hội tụ được xét trong phần I, mỗi một trong các phần II và III xét một ví dụ và là độc lập với nhau. Các câu hỏi cuối trong các phần II và III ít chi tiết hơn.

Phần I

1. Với mọi số thực x và mọi số nguyên n khác 0, ta đặt $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k.\sin(kx)$.

   Chứng minh rằng :

   $$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)S_n(x) = b_1.\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k).\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - b_{n+1}.\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

2. Từ đó suy ra rằng với m > n :

   $$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)[S_m(x) - S_n(x)] = \sum_{k=n+1}^{m}(b_{k+1}-b_k).\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) + b_{n+1}.\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - b_{m+1}.\cos\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

3. Với $x \notin 2\pi\mathbf{Z}$, và m, n là hai số nguyên sao cho m > n > 0, hãy chứng minh bất đẳng thức :

   $$|S_m(x) - S_n(x)| \le \frac{b_n}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$$

4. Xác định miền hội tụ đơn của chuỗi.
   Kí hiệu S là tổng của chuỗi. Chứng minh rằng S là 2π-tuần hoàn và là hàm lẻ.
5. Chứng minh sự hội tụ đều của chuỗi trên mọi tập hợp $[\alpha ; 2\pi-\alpha]+2\pi\mathbf{Z}$ trong đó α là một số thực thuộc $]0; \pi[$.
   Từ đó suy ra tính liên tục của S trên $D = \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$.

Phần II

Ta lấy $b_n = \frac{1}{n}$. Kí hiệu $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}.\sin(nx)$. Theo phần I, f xác định trên **R**, 2π-tuần hoàn, lẻ và liên tục trên D. Ta sẽ tính f(x).
Nhận xét rằng $f(0) = 0 = f(\pi)$. Ta cố định x trong $]0,\pi[$.

1. <u>Kết quả trung gian</u>. Cho $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ là một chuỗi nguyên với bán kính 1. Giả thiết chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ hội tụ với tổng s. Đặt $s_n = \sum_{k=0} a_k$, và $s_{-1} = 0$.

   1.a Chứng minh rằng với $z \in [0,1[$: $(1-z)\sum^{+\infty} s_n z^n = S(z)$

1.b Từ đó suy ra rằng S(z) dần tới s khi z dần tới 1. Ta có thể sử dụng đồng nhất thức $s-S(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty}(s-s_n)z^n$, đúng với z $\in [0,1[$.

2. Đặt $\phi(u) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}.\sin(nx).u^n$ (nhắc lại rằng x cố định trong $]0,\pi[$). Chứng minh rằng bán kính hội tụ R của chuỗi nguyên trên với tổng ϕ, là lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh tính liên tục của ϕ trên [0,1] và tính khả vi của nó trên]-1 ;1[.
3. Kiểm chứng rằng $\phi'(u) = \dfrac{\sin(x)}{1-2u\cos(x)+u^2}$ với $u \in]-1,1[$.
4. Từ đó suy ra $\phi(u)$ với $u \in]-1,1[$. Sử dụng II.1, kiểm chứng đẳng thức $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ với $x \in]0 ;\pi[$. Từ đó suy ra f trên $]0 ;2\pi[$.
5. Xác định chuỗi Fourier của f. Ta có những kết quả gì về sự hội tụ ?
6. Ta sẽ nhận được gì khi áp dụng định lí Bessel-Parseval vào f ?
7. Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(nx)}{n^2} = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{\pi^2}{6}$ với $x \in [0 ;2\pi[$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}.\sin(nx)$ là chuỗi Fourier của tổng của nó

Phần III

Bây giờ ta lấy $b_n = \dfrac{1}{ln(n+1)}$. Kí hiệu $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{ln(n+1)}.\sin(nx)$. Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng rằng chuỗi này không phải là chuỗi Fourier của tổng g của nó.

Nếu đúng như vậy thì $G(x) = \int_x^{\pi} g(t)dt$ có giới hạn hữu hạn Γ, khi x dần tới 0 về bên phải.

Ta lấy x thuộc $[0,\pi]$.

1. Xác định một tương đương đơn giản của $\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{nln(n+1)}$ khi N dần tới $+\infty$, và kiểm chứng rằng $\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{nln(n+1)}$ dần tới $+\infty$, cùng với N. Ta có thể so sánh tổng riêng với một tích phân.
2. Chứng minh rằng $G(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k.ln(k+1)}\left[\cos(kx)-(-1)^k\right]$
3. $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k.ln(k+1)}$ có hội tụ hay không ?
4. Băng cách nhận xét (theo III.2) :

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{nln(n+1)} - G(x) - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k.ln(k+1)} = \sum_{k=1}^{N}\frac{1-\cos(kx)}{k.ln(k+1)} - \sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{\cos(kx)}{kln(k+1)}$$

chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{nln(n+1)} - G(\dfrac{1}{N}) - \sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k.ln(k+1)}$ dần tới 0+, khi N dần tới $+\infty$.

Kết luận.

Nói riêng $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{ln(n+1)}.\sin(nx)$ không phải là chuỗi Fourier của tổng của nó

Lời bình văn hóa :

Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n.\sin(nx)$ là chuỗi Fourier của tổng của nó khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}$ hội tụ.

Bài tập Đại số tuyến tính và Hình học

Ta xét dạng toàn phương xác định trên không gian Ơclit $\mathbf{R}^3$ bởi

$$Q(x,y,z) = \frac{13}{6}x^2 - \frac{11}{3}xy + \frac{4}{3}xz + \frac{13}{6}y^2 + \frac{4}{3}yz - \frac{1}{3}z^2$$

1. Xác định ma trận U ứng với cơ sở chính tắc của tự đồng cấu đối xứng liên kết, u.
2. Chéo hóa trực giao U bằng cách nhận xét rằng 1 là giá trị riêng liên kết với vectơ riêng (1,1,1)
3. Bản chất của mặt bậc hai H có phương trình Q(x,y,z) = 1 là gì ? Hãy nêu rõ các yếu tố hình học của nó.
4. Tìm thể tích của phần bên trong của H xác định bởi $|z| \leq \sqrt{3}$.

Bài tập Xác suất

Một hãng du lịch đề xuất hai chuyến tham quan vịnh Hạ long : chuyến A và chuyến B. Mỗi ngày số khách du lịch tới với hãng là một biến ngẫu nhiên N tuân theo luật Poisson tham số λ Ta giả thiết rằng mỗi khách du lịch chọn một cách độc lập chuyến tham quan A với xác suất p, $0 < p < 1$.

Kí hiệu X_A là biến ngẫu nhiên biểu thị số khách du lịch chọn chuyến tham quan A trong ngày

1. k và n là hai số nguyên, hãy tính $P(X_A=k/N=n)$, xác suất của biến cố $\{X_A = k\}$ giả thiết rằng $\{N = n\}$.
2. Xác định luật phân bố đồng thời của cặp (N,X_A).
3. Xác định luật phân bố , kì vọng và phương sai của X_A.
4. Xác định luật phân bố của X_B.
5. X_A và X_B có độc lập không ?