ĐỀ THI MÔN TOÁN 2003

(*Thời gian 3h*)

Bài tập về Giải tích

Chủ đề: Phép biến đổi Laplace
Thời gian: nên làm trong 2h
Các phần I, II, III và IV độc lập với nhau

Với mọi hàm thực, *f*, xác định và liên tục trên $\Re_+$, D(f) là tập hợp các số thực s **dương** sao cho ánh xạ $t \to e^{-st}.f(t)$ khả tích trên $\Re_+$. Ký hiệu E là tập hợp hàm thực xác định và liên tục trên $\Re_+$ sao cho D(f) không rỗng. Cuối cùng, nếu $f \in$ E, ta ký hiệu $L(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}.f(t)dt$ với s $\in$ D(f).

Phần I Các ví du

1. Câu hỏi sơ bộ. Giả sử z là một số phức, chứng minh rằng $t \to e^{zt}$ khả tích trên $\Re_+$, nếu và chỉ nếu Re(z) < 0.

2. Cho số tự nhiên n cố định, ký hiệu p_n là ánh xạ đa thức xác định trên $\Re_+$ và được cho bởi $t \to t^n$. Hãy xác định D(p_n), rồi tính L(p_n)(s) với s $\in$ D(p_n).

3. Với a$\in \Re$, ký hiệu e_a là hàm xác định trên $\Re_+$ và được cho bởi $t \to e^{at}$. Hãy xác định D(e_a) và tính L(e_a).

4. Giả sử f $\in$ E, hãy xác định D(e_a.f) theo D(f) và a. Tính L(e_a.f) theo L(f), a và s.

5.Với a $\in \Re$, ký hiệu c_a và s_a lần lượt là các ánh xạ t $\to$ cos (at) và t $\to$ sin(at). Tính D(c_a), D(s_a), L(c_a) và L(s_a).

6. *Tác dụng của phép tịnh tiến*: Đối với f thuộc E sao cho f(0) = 0 và a $\in \Re_+$, ký hiệu g là hàm bằng 0 trên [0, a] và bằng x $\to$ f(x -a) trên $[a,+\infty[$. Chứng minh rằng g$\in$ E và D(g) $\subset$ D(f). Tính L(g) theo L(f) và e_a.

7. *Tác dụng của phép đổi thang*: Giả sử λ là một số thực dương, f $\in$ E và h là hàm xác định trên $\Re_+$ và được cho bởi t $\to$ f(λt). Hãy xác định D(h) theo D(f) và λ. Với s $\in$ D(h) hãy tính L(h)(s) theo L(f)(s) và λ.

Phần II Một số kết quả tổng quát

8. Giả sử f $\in$ E:

   a) Chứng minh rằng D(f) là một khoảng không thể làm trội.

   b) Chứng minh rằng E là không gian vectơ trên $\Re$

   c) Chứng minh rằng nếu f và g $\in$ E, λ thuộc $\Re$, thì L(λf+g)=λL(f)+L(g) trên D(f)$\cap$D(g).

9. Giả sử f $\in$ lớp C^1 trên $\Re_+$, f và $f' \in$ E và $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-st}.f(t) = 0$ với mọi s $\in$ D(f). Tính L(f') theo L(f), s và f trên D(f)$\cap$D(f').

10. Với f và g $\in$ E , t trong $\Re_+$, ta định nghĩa $f * g(t) = \int_0^t f(u).g(t-u)du$

a) Chứng minh rằng $f * g = g * f$

b) Với s $\in$ D(f)$\cap$D(g), tính L($f * g$)(s) theo L(f)(s) và L(g)(s)

11. Chứng minh rằng đối với f trong E, L(f) là C^1 ở miền trong của D(f), I(f) và hãy tính đạo hàm của L(f).

Phần III Phép biến đổi Laplace của một số chuỗi nguyên

Xét một chuỗi nguyên $\sum_{n=0}^{+\infty} n!u_n t^n$ có bán kính R > 0. Ta đặt $\rho = \frac{1}{R}$ (bằng 0 nếu R bằng ∞).

12. Chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$ có bán kính vô hạn; f là tổng của nó.

13. Chứng minh rằng $]\rho,+\infty[\subset$ D(f) và $L(f)(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!u_n}{s^{n+1}}$ với s thuộc $]\rho,+\infty[$.

14. Ví dụ

Giả sử f(x) là tổng của chuỗi nguyên $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$

a) Hãy xác định bán kính hội tụ của chuỗi nguyên $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$

b) Chứng minh rằng, với s > 1, $L(f)(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{s^{2n+1}}$

c) Khai triển $t \to \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ thành chuỗi nguyên . Tính bán kính hội tụ của nó.

d) Tìm một biểu thức đơn giản của L(f)(s) với s > 1.

Phần IV. Ứng dụng

15. Với t thuộc $\Re$, xét phương trình (E) được định nghĩa bởi:

$$x'(t) + 5\int_0^t \cos[2(t-u)]x(t)dt = 1 \quad \text{và } x(0) = 1$$

a) Biện luận về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của (E)

b) Giả sử rằng nghiệm x của (E) thuộc E, ta đặt X = L(x). Hãy xác định phương trình mà X thoả mãn. Giải phương trình đó.

c) Tìm một biểu thức của x bằng cách dùng các kết quả của Phần II.

Bài tập về Đại số tuyến tính và Phương trình vi phân tuyến tính

Thời gian: nên làm trong 1h

Cho không gian Euclid E = $\Re^n$, có định hướng và có trang bị một tích vô hướng: $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2+...+x_ny_n$. Ký hiệu |x| là chuẩn Euclid của x.

Một tự đẳng cấu u của E được gọi phản đối xứng nếu và chỉ nếu $u = -u^*$ trong đó u^* là liên hợp của u. Tức là, với mọi x và y trong E: (u(x)|y) = - (x|u(y)).

Giả sử u là một tự đẳng cấu phản đối xứng.

1) Mô tả ma trận U của u trong một cơ sở trực chuẩn.

2) Chứng minh rằng Ker(u) và Im(u) là các phần bù trực giao.

3) Chứng minh rằng 0 là giá trị **thực** duy nhất khả dĩ.

4) Chứng minh rằng hạng của u là chẵn.

5) Phổ của một tự đẳng cấu phản đối xứng u

   a) Chứng minh rằng u^2 là đối xứng có các giá trị riêng âm hoặc bằng 0.

   b) Đặt $\chi_1(x) = \det(x.id_E - u)$ và $\chi_2(x) = \det(x.id_E - u^2)$. Chứng minh rằng $[\chi_1(x)]^2 = \chi_2(x^2)$. Từ đây suy ra điều gì đối với các giá trị riêng **phức** của u?

6) Quy gọn tự đẳng cấu phản đối xứng:

   a) Giả sử λ là một giá trị riêng **khác 0** của u^2. Không gian con riêng của u^2 tương ứng với λ , được ký hiệu là $E(\lambda)$, và là ổn định đối với u. Chứng minh rằng nó chấp nhận một cơ sở trực chuẩn có dạng: $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), ..., e_p, u(e_p))$.

   b) Từ đó suy ra tồn tại một cơ sở trực chuẩn của E sao cho ma trận của u trong cơ sở đó là chéo theo khối:

chéo ($\boxed{\begin{matrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix} 0 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & 0 \end{matrix}}$ ... $\boxed{\begin{matrix} 0 & \alpha_k \\ -\alpha_k & 0 \end{matrix}}$ $\boxed{0}$), trong đó α_i là những số khác 0, còn khối cuối cùng toàn là số 0 với số chiều là n - 2k (2k là hạng của u).

7. Ví dụ. Giả sử $\Lambda_a : x \to a \wedge x$ từ $\mathfrak{R}^3$ vào $\mathfrak{R}^3$ trong đó a là một vectơ thuộc $\mathfrak{R}^3$.

a) Chứng minh rằng Λ_a là phản đối xứng

b) Giả sử (p, q, r) là ba toạ độ của a trong một cơ sở trực chuẩn b. Xác định ma trận của Λ_a trong cơ sở đó.

c) Tìm một cơ sở trực chuẩn b' trong đó ma trận Λ_a có dạng:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -|a| \\ 0 & |a| & 0 \end{bmatrix}$$

---- HẾT ---