

Câu 1

Khảo sát sự hội tụ của dãy $\{u_n\}$ với $u_0 \in \mathbb{R}$ và

$$u_{n+1} = \frac{3}{2u_n^2 + 1}$$

Câu 2

Đặt $X = (-1, +\infty)$. Xét hàm số $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ} \\ \frac{1}{1+p+q} & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỉ, } x = \frac{p}{q}, p, q \text{ nguyên tố cùng nhau.} \end{cases}$$

Khảo sát tính liên tục của hàm $f(x)$ trong X .

Câu 3

Trên không gian vectơ euclide E , cho tự đồng cấu f có ma trận trong cơ sở trực chuẩn $\mathcal{B}(i, j, k)$ là

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Hãy phân tích f thành tích các phép phản chiếu trực giao.

Câu 4

$$\text{Cho } f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & (x, y) \neq (1, 1) \\ 0 & (x, y) = (1, 1) \end{cases}$$

- Chứng minh rằng hàm f liên tục trên $[0, 1]^2$
- Tìm trị bé nhất, trị lớn nhất của hàm f trên $[0, 1]^2$

Câu 5

Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n - (-1)^n}$.

Câu 6

Cho 3 số dương a, b, c .

$$\text{Ký hiệu : } D_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, c] \mid (ax^2 + by^2) \leq z^2\}$$

Biết $\int_0^{\infty} \cos t^2 dt$ hội tụ, tìm $\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \iiint_{D_c} \sin(ax^2 + bx^2) dx dy dz$.

Câu 7

Cho:

$$y'' - 4y = a|x| + b \quad (1) \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

1. Tìm nghiệm tổng quát của (1) trên $(0, +\infty)$ và trên $(-\infty, 0)$ (dùng các hàm hyperbol để viết nghiệm tổng quát).
2. Tìm nghiệm của (1) trên \mathbb{R} và, nếu có, hãy tìm nghiệm φ của (1) sao cho $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$

Câu 8

Một người hẹn sẽ chờ hai người bạn ở một địa điểm xác định từ 6 giờ đến 7 giờ. Giả sử mỗi người bạn này hoàn toàn độc lập với nhau sẽ đến điểm hẹn đó vào một thời điểm bất kỳ trong khoảng thời gian đã hẹn trên một cách đồng khả năng.

1. Hãy tìm hàm phân phối xác suất của thời gian đợi tối thiểu của người đó để anh ta có thể gặp một trong hai người bạn của mình.
2. Tìm giá trị trung bình của thời gian đợi được xét trên?