

5



Chương trình đào tạo kỹ sư chất lượng cao tại Việt Nam

ĐỀ THI PHÂN NGÀNH NĂM 2005

Môn : Toán (đề chính thức)

Thời gian : 180 phút

(Không được phép sử dụng tài liệu)

Câu 1 :

Cho A là một vành và giả sử với $a \in A$ tồn tại duy nhất $a' \in A$ thỏa $aa' = 1$. Chứng minh rằng a là phần tử chính quy trái, từ đó suy ra a là khả đảo và $a^{-1} = a'$

Câu 2 :

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hãy tính A^n với $n \in \mathbb{Z}$.

Câu 3 :

Cho $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ là một hệ cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide E . $f \in \mathcal{L}(E)$ có

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ \cdot & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Chứng minh rằng f là một phép chiếu. Tìm $\text{Im}(f)$ và $\text{Ker}(f)$.
- b) Ký hiệu $H = \text{Ker}(f)$, $G = \text{Im}(f)$.

Chứng minh rằng f^* là phép chiếu lên H^\perp theo phương G^\perp .

c) Cho ma trận $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(B) \subset \mathbb{R}_+$.

Câu 4 :

Hãng hàng không A có 2 đại lý bán vé máy bay D_1 và D_2 đặt ở Hà Nội. Lượng khách đến mua vé trong một ngày ở các đại lý này là các đại lượng ngẫu nhiên X_1, X_2 tuân theo quy luật Poisson với tham số tương ứng là λ_1, λ_2 .

- a) Tìm luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên $Z = X_1 + X_2$.
- b) Trong số vé D_1 bán ra có 25% đi Huế. Hỏi trung bình mỗi ngày có bao nhiêu vé đi Huế bán ra từ D_1 .

Câu 5 :

Cho f là hàm của \mathbf{R}^2 vào \mathbf{R} xác định bởi:

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{nếu } y \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } y = 0 \end{cases}$$

Xét sự liên tục và khả vi của f trên \mathbf{R}^2 cũng như sự liên tục của các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Thí sinh có nhận xét gì rút ra từ bài tập trên?

Câu 6 :

Cho $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ là hàm khả vi liên tục sao cho $\forall x \in \mathbf{R}, (f \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 3$. Hãy xác định hàm f .

Câu 7 :

a) Giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng sau :

$$y'' - 6.y' + 9.y = 0$$

b) Sử dụng kết quả câu a) giải phương trình

$$y'' - 6.y' + 9.y = \sin(x)$$

Tìm nghiệm riêng thỏa mãn $y(0) = 0, y'(0) = 0$

Câu 8 :

Cho chuỗi hàm

$$\sum_{n \geq 1} f_n, f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_n(x) = \frac{\sin nx}{n.(n+1)(n+2)} \quad \forall n \geq 1$$

a) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi (hội tụ đơn, hội tụ tuyệt đối, hội tụ đều, hội tụ chuẩn)

b) Kí hiệu $S(x)$ là tổng của chuỗi. Chứng minh S là ánh xạ co trên \mathbf{R} .
