6

P.F.I.E.V

Chương trình Đào tạo Kỹ sư Chất lượng cao tại Việt nam

ĐỀ THI PHÂN NGÀNH MÔN TOÁN NĂM 2006

Thời gian làm bài: 180 phút

Phần I: ĐẠI SỐ

A . Đại số tuyến tính

Trong mục này ta ký hiệu E là $\mathbb{K}$- không gian véctơ n chiều($n \geq 1$), f là ánh xạ cho trước thuộc L(E), G_f là tập con của L(E) xác định như sau :

$$G_f = \{u \in L(E) | u \circ f = f \circ u \}.$$

1. Chứng minh G_f là không gian véctơ con của L(E).
2. Giả thiết $g \in G_f$. Chứng minh rằng nếu f có n trị riêng đôi một khác nhau, thì g chéo hoá được.
3. Cho $n = 3$, F và H là 2 không gian véctơ con bù nhau trong E, dim(F) = 2, f là phép chiếu lên F theo phương H. Tìm dim (G_f).
4. Giả thiết $h \in G_f$. Chứng minh rằng mỗi không gian con riêng của f (nếu có) đều ổn định đối với h.
5. Trong câu hỏi này ta giả thiết E là không gian Hermite.
   a) Chứng minh rằng nếu $u \in G_f$ thì f và u có chung ít nhất một vectơ riêng.
   b) Giả sử ma trận của f trong một cơ sở trực chuẩn của E có dạng chéo. Chứng minh rằng $f^* \in G_f$.
   c) Áp dụng 4. và 5a, ta có thể chứng minh được rằng nếu $f^* \in G_f$ thì trong E tồn tại một cơ sở trực chuẩn gồm các vectơ riêng của f và f^*. Từ nhận xét này và từ 5b, hãy nêu điều kiện cần và đủ để một tự đồng cấu của không gian Hermite là chuẩn tắc.

B . Đại số đại cương

Cho m là số nguyên dương. Ta biết rằng quan hệ đồng dư theo môđulô m là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$. Ký hiệu $\mathbb{Z}_m$ là tập thương của $\mathbb{Z}$ theo quan hệ đồng dư đó. Lớp tương đương của phần tử $a \in \mathbb{Z}$ được ký hiệu là $\overline{a}$. Như vậy $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$.

Trên $\mathbb{Z}_m$, định nghĩa phép cộng và nhân như sau :

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \ ; \ \overline{a}.\overline{b} = \overline{a.b}.$$

Dễ chứng minh được ($\mathbb{Z}_m$,+) là nhóm Abel, ($\mathbb{Z}_m$, +, .) là vành giao hoán.

1. Chứng minh rằng mỗi nhóm xyclic cấp m đều đẳng cấu với ($\mathbb{Z}_m$, +).
2. Chứng minh rằng ($\mathbb{Z}_m$, +, .) có ước của không khi và chỉ khi m là hợp số. Từ đó tìm điều kiện để ($\mathbb{Z}_m$, +, .) là một thể.
3. Tìm các đồng cấu từ nhóm ($\mathbb{Z}_{2005}$, +) vào nhóm ($\mathbb{Z}_{2006}$, +) .
   (*Chú ý:* Ta có phân tích thành các nhân tử nguyên tố của 2005 và 2006 là $2005 = 5 \times 401$, $2006 = 2 \times 17 \times 59$).

Phần II: GIẢI TÍCH

Cho ánh xạ:
$$F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$(x,t)\mapsto\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arctg}(xt)}{t(1+t^2)} & \text{khi } t\neq 0\\ x & \text{khi } t=0\end{cases}$$

I. *Khảo sát sơ bộ hàm F.*

1. Tìm $\lim\limits_{t\to 0}F(x,t)$.
2. Hàm F liên tục trên $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$?
3. Tính $\dfrac{\partial F}{\partial x}$; $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ tại điểm (0,0).
4. Xét tính khả vi của hàm F tại điểm (0,0) .
5. Tìm giá trị lớn nhất của hàm F trên miền $D=[0,1]\times[0,1]$.

II. *Tích phân*

Đặt $f(x)=\int\limits_0^{+\infty}F(x,t)dt$ nếu tích phân này hội tụ.

6. Tìm miền xác định của f. Xét tính chẵn lẻ của f.
7. f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$? Tính f'.
8. Tính $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dt}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$, từ đó suy ra f.
9. Tính $\iint\limits_{\Omega}F(x,t)dxdt$ với $\Omega:=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,\middle|\,1\le t\le\sqrt{3};\dfrac{1}{t}\le x\le\dfrac{\sqrt{3}}{t}\right\}$.

III. *Phương trình vi phân*

Xét phương trình vi phân:

$$\text{(e)}\quad (1+x)y' + y = \frac{\pi}{2}\left[1+\ln(1+x)\right].$$

10. Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi luỹ thừa của x và tìm bán kính hội tụ của chuỗi này.
11. Giải (e).
12. Từ đó suy ra thu hẹp của f trên (-1,1) là một nghiệm của (e).

Phần III: XÁC SUẤT

Có hai hộp kín. Hộp A đựng 2 viên bi đỏ và 2 viên bi xanh, hộp B đựng 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh.

1. Lấy ngẫu nhiên từ hộp A hai viên bi. Nếu hai bi lấy ra khác màu hoặc cùng mầu xanh thì hoàn lại vào hộp A rồi lấy tiếp hai viên từ hộp A. Quá trình này được tiếp tục cho đến khi lấy được 2 viên cùng mầu đỏ. Hỏi trung bình phải lấy bao nhiêu lần để được 2 viên đỏ?
2. Lấy ngẫu nhiên từ hộp A hai viên bi rồi bỏ sang hộp B, sau đó lấy ngẫu nhiên từ hộp B hai viên. Tính xác suất lấy được 2 viên bi khác màu .