

12

$u = -0$ Thời gian làm bài : 180 phút

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$$

Phần I ĐẠI SỐ

A. Đại số đại cương

Cho (G, \times, e) là một nhóm hữu hạn, kí hiệu $\text{card}G$ là số phần tử của G .

1. Với H là nhóm con của nhóm G , xác định quan hệ hai ngôi

$$\forall (a, b) \in G^2, a R b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

Chứng minh rằng quan hệ R là quan hệ tương đương. Từ đó suy ra $\text{card}H$ là một ước số của $\text{card}G$

2. Chứng minh rằng với mọi phần tử a thuộc G đều có ước số $m(a)$ của $\text{card}G$ để sao cho

$$a^{m(a)} = e \text{ và } \forall p \in [1, m(a)-1], a^p \neq e$$

3. Áp dụng kết quả trên vào nhóm nhân module $p : \mathbb{Z}_p^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{p-1}\}$.

Chứng minh rằng nếu $p = 2^h + 1$ là số nguyên tố thì h là một lũy thừa của 2.

Điều ngược lại có đúng không?

B. Đại số tuyến tính

Cho E là \mathbb{R} - không gian, $\dim E = 2$. Cho $f \in \mathcal{L}(E)$ và họ n - vectơ ($n \geq 2$)

(a_1, \dots, a_n) từng đôi một khác nhau, sinh ra không gian E và thỏa mãn

$$\forall i \in [1, n-1], f(a_i) = a_{i+1} \text{ và } f(a_n) = a_1$$

1. Chứng minh rằng $f^n = id$ và $\forall m \in [1, n-1], f^m \neq id$

2. Chứng minh rằng các vectơ a_i không phải là vectơ riêng của tự đồng cấu f . Từ

đó suy ra các họ vectơ $\mathcal{B}(a_i, a_{i+1})$ là cơ sở của không gian E

3. Chứng minh rằng ma trận của f trong các cơ sở nói trên luôn có dạng

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \text{ với } a = \pm 1 \text{ và } b \in \mathbb{R}$$

4. Suy ra đa thức đặc trưng $P(f)$ chỉ có các nghiệm đơn.

5. Trường hợp các trị riêng thực, chéo hóa tự đồng cấu f

Phần II GIẢI TÍCH

A. Phép tính vi - tích phân

1. Cho hàm $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ với $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & (x, y) \neq (1, 1) \\ 0 & (x, y) = (1, 1) \end{cases}$

a) Chứng minh rằng hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền $[0, 1]^2$

b) Tìm trị bé nhất, trị lớn nhất của hàm $f(x, y)$ trên miền $[0, 1]^2$

a) Chứng minh rằng hàm $f(x) = \frac{\ln x}{1-x^a}$ với $a > 1$ khả tích trên khoảng $(1, +\infty)$

b) Tính tích phân $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$

B. Phương trình vi phân

a) Giải phương trình vi phân $x' = \frac{x^4 + 3t^4}{4xt^3}$

b) Tìm nghiệm cực đại của câu a) thỏa mãn $x(1) = 2$

2. Giải hệ phương trình vi phân
$$\begin{cases} x' = 3x - 2y - 4z + t \\ y' = -2x + 3y + 2z \\ z' = 3x - 3y - 4z \end{cases}$$

Phần III XÁC SUẤT

Bốn đội bóng Brasil, Đức, Bồ Đào Nha, Ý vào bán kết World Cup 2006 có khả năng thắng thua như sau

· Brasil thắng Đức, Bồ Đào Nha, Ý với xác suất tương ứng là 0,5; 0,6; 0,7.

Đức thắng Bồ Đào Nha, Ý với xác suất tương ứng là 0,6; 0,7.

Bồ-đào-nha thắng Ý với xác suất là 0,6

Brasil gặp Ý, Đức gặp Bồ Đào Nha ở vòng bán kết và 2 đội thắng vào chung kết.

1. Tính xác suất Brasil vô địch

2. Biết Brasil vô địch, tính xác suất Bồ Đào Nha vào chung kết