(8)

Chương trình đào tạo
Kỹ sư chất lượng cao

ĐỀ THI PHÂN NGÀNH NĂM 2008 MÔN TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút

I) PHẦN ĐẠI SỐ

Câu 1.

1. Cho không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ trên trường số thực $\mathbb{R}$ với $n \geq 2$. Giả sử G là không gian con của $\mathbb{R}^n$ sinh ra bởi véc tơ $a = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ và $H = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$. Chứng minh rằng $G \oplus H = \mathbb{R}^n$.
2. Cho E là không gian véc tơ hữu hạn chiều với $\dim E = n > 2$ và H_1, H_2 là hai không gian con của E sao cho $H_1 \neq H_2$ và $\dim H_1 = \dim H_2 = n - 1$. Hãy tìm $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Câu 2. Cho A là ma trận vuông cấp n và f là đa thức trên trường số phức.

1. Giả sử $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ là tất cả các giá trị riêng (kể cả bội) của A. Chứng minh rằng
$$\det(f(A)) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)...f(\lambda_n)$$
Từ đó, chứng minh rằng, nếu μ là giá trị riêng của $f(A)$ thì tồn tại giá trị riêng λ của A sao cho $\mu = f(\lambda)$.
2. Chứng minh rằng, nếu A chéo hoá được thì $f(A)$ cũng chéo hoá được.
3. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ và $f(x) = x^4 + 3x^2 + x + 2$.
Hãy chéo hoá trực giao A và từ đó chéo hoá trực giao $f(A)$.

II) PHẦN GIẢI TÍCH.

Câu 1. Cho hàm hai biến

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Khảo sát sự liên tục của hàm số $f(x,y)$.
2. Khảo sát sự tồn tại và liên tục của các đạo hàm riêng của $f(x,y)$.

Câu 2.

1. Tính
$$I = \iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)}$$
với $D = \{(x,y) | x \geq 1;\ x^2 + y^2 \leq 2x\}$.
2. Giải phương trình vi phân sau: $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$.

Câu 3. Cho hàm số

$$f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - t\cos^2 x}$$

xác định với $t \in (-1, 1)$.

a) Hãy viết biểu diễn của $f(t)$ bằng cách tính tích phân ở vế phải nhờ phép đổi biến $\operatorname{tg}x = u$. Từ đó viết khai triển của $f(t)$ thành chuỗi luỹ thừa (Maclaurin) của t.

b) Chứng tỏ rằng với mỗi $t \in (-1, 1)$ thì hàm số $g(x) = \dfrac{1}{1 - t\cos^2 x}$ có thể khai triển được thành chuỗi luỹ thừa (Maclaurin). Từ đó suy ra một dạng biểu diễn tương ứng thành chuỗi luỹ thừa của hàm số $f(t)$.

c) Từ kết quả thu được ở (a) và (b), hãy sử dụng tính duy nhất của khai triển hàm $f(t)$ thành chuỗi luỹ thừa để suy ra giá trị của

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx.$$

III) PHẦN XÁC SUẤT.

Nghiên cứu về số lượng xe ô tô có trong một khu chung cư, người ta khảo sát một mẫu có 3238 hộ đã đăng ký mua nhà và thấy có 1943 hộ đã có xe ô tô (giả thiết là mỗi hộ chỉ có không quá 1 xe ô tô).

1. Hãy ước lượng tỷ lệ hộ có xe ô tô trong khu chung cư trên bằng khoảng tin cậy đối xứng với mức độ tin cậy là 95%.

2. Hỏi cần điều tra bao nhiêu hộ để với mức độ tin cậy 95% sẽ có được độ chính xác của khoảng tin cậy là 0,05?

3. Nếu giả sử tỷ lệ hộ có xe ô tô là p chưa biết và cũng chưa có mẫu ngẫu nhiên nói trên nhưng vẫn muốn ước lượng tỷ lệ p bằng khoảng tin cậy đối xứng với mức độ tin cậy 95% sao cho độ dài khoảng tin cậy này sẽ không vượt quá 0,05 thì cần phải lấy một mẫu có kích thước n bao nhiêu là hợp lý?

   Cho biết $F_{\mathcal{N}(0,1)}(1,96) = 0,975$ (trong đó $F_{\mathcal{N}(0,1)}(x)$ là hàm phân phối chuẩn có kỳ vọng là 0 và phương sai là 1).

======================

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!!!