

Thời lượng: 180 phút

Phần I: ĐẠI SỐ

Câu 1. Cho ánh xạ tuyến tính f là phép đối xứng trong hệ trục $Oxyz$ qua mặt phẳng $y = 0$.

a) Tìm tất cả các trị riêng của f .

b) Tìm cơ sở và số chiều của các không gian con riêng tương ứng.

Câu 2. Cho ma trận A đối xứng thực cấp n ($n \geq 2$). Giả sử tất cả các trị riêng của A đều lớn hơn λ . Chứng

minh rằng dạng toàn phương đối với ma trận $A - \lambda I$ là xác định dương (I là ma trận đơn vị)

Phần II: GIẢI TÍCH

Câu 3. Tính các tích phân $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2009})}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$, $I_2 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$

Câu 4. Cho $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, liên tục, $F: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, xác định bởi $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f$.

a) Chứng minh rằng nếu $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$ (hữu hạn), thì $F \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$

b) Cho ví dụ f không có giới hạn ở $+\infty$ và $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

c) Chứng minh rằng nếu $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, thì $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Câu 5. Cho $P(x, y) = x + y^2$; $Q(x, y) = -2xy$.

a) Tìm hàm $h = h(x)$, $h(0) = 1$ sao cho tích phân $\int_{AB} h(x)P(x, y)dx + h(x)Q(x, y)dy$ không phụ thuộc

đường đi từ A đến B.

b) Với $h(x)$ tìm được tính tích phân

$\oint_C [h(x)P(x, y) + 2x^2y - 4x] dx + [h(x)Q(x, y) - 2xy^2 + 2y^2] dy$, trong đó C là đường tròn

$x^2 + y^2 = 4$, lấy ngược chiều kim đồng hồ.

Câu 6. Tính thông lượng của trường vectơ $\vec{F} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ qua toàn bộ bề mặt vật thể

$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 3R^2, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2 - R^2} \right\}$, theo phía ngoài.

Câu 7. Cho dãy số thực $\{a_n\}$: $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{4}{n+1} a_{n-1}$ ($n \geq 1$)

a/ Chứng minh dãy $\left\{ \frac{a_n}{n^4} \right\}$ giảm. Từ đó tìm bán kính hội tụ R của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

b/ Trên khoảng $(-R, R)$ đặt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Chứng minh $f(x)$ thỏa mãn hệ thức:

$$(1-x)f'(x) = (1+4x)f(x). \text{ Từ đó tìm } f(x)$$

Câu 8. Đặt $F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-3t-\frac{x}{t}}$, $x \geq 0, t > 0$ và xét $f(x) = \int_0^{+\infty} F(x,t) dt$

a/ Chứng minh trên miền $D = \{(x,t) | x \geq 0, t > 0\}$, $F(x,t)$ thỏa giả thuyết hàm trội, còn $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ không

thỏa giả thuyết hàm trội nhưng thỏa giả thuyết hàm trội địa phương. Tính $f'(x)$

b/ Bằng phép đổi biến $t = \frac{x}{au}$, hãy xác định phương trình vi phân cấp 1 nhận $f(x)$ là nghiệm. Tìm $f(x)$

Chú ý: Được phép sử dụng kết quả $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Câu 9. a/ Giải phương trình vi phân: $y'' - 2my' + (9 + m^2)y = \cos 3x$ (tham số

$m \in \mathbb{R}$)

b/ Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 10 & -7 & -2 \\ 10 & -6 & -3 \end{bmatrix}$. Từ đó giải hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} x'(t) = 9x - 6y - 2z \\ y'(t) = 10x - 7y - 2z \\ z'(t) = 10x - 6y - 3z \end{cases}$$

PHẦN III. XÁC SUẤT

Câu 10. Có 3 lô thuốc A, B, C. Biết rằng tỷ lệ thuốc hỏng tương ứng của 3 lô trên là

$$P_A = 0,1, P_B = 0,08, P_C = 0,15. \text{ Giả sử các lô có rất nhiều lọ.}$$

a) Lấy ngẫu nhiên 3 lọ ở lô A. Tính xác suất để có ít nhất 1 lọ hỏng. Lấy tối thiểu mấy lọ ở lô A để xác suất có ít nhất 1 lọ hỏng $\geq 0,95$.

b) Chọn ngẫu nhiên một lô trong 3 lô trên rồi từ lô đó lấy ngẫu nhiên 3 lọ. Tính xác suất có ít nhất 1 lọ hỏng.

c) Lấy ngẫu nhiên ở mỗi lô 1 lọ. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số lọ hỏng trong 3 lọ lấy ra. Lập bảng phân phối của X, tính phương sai $D(X)$.

d) Cửa hàng nhận ngẫu nhiên 500 lọ ở lô A, 300 lọ ở lô B, 200 lọ ở lô C. Mua ngẫu nhiên 1 lọ ở cửa hàng. Tính xác suất để mua được lọ tốt.