

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

A. ĐẠI SỐ (10 điểm)

**Câu I** Cho  $a, b \in \mathbb{R}^*$  với  $a \neq \pm b$ . Kí hiệu

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } M = aJ + bK$$

- 1) Chứng tỏ rằng  $J^2 = K^2 = 2J$  và  $JK = KJ = 2K$
- 2) Chứng tỏ rằng  $M^3 - 4aM^2 + 4(a^2 - b^2)M = 0$
- 3) Suy ra ma trận  $M$  là khả chéo
- 4) Tìm trị riêng và vectơ riêng của ma trận  $M$
- 5) Chứng tỏ rằng  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sao cho  $M^n = \alpha J + \beta K$ . Biểu diễn  $\alpha$  và  $\beta$  qua  $a, b$  và  $n$

B. GIẢI TÍCH (20 điểm)

**Câu II** Cho các hàm số

$$f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x) = x(\ln(\cos x) + \ln(\sin x))$$

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow g(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x \cdot \cos^2 t) dt$$

Trong đó  $D$  là miền xác định của hàm  $g(x)$ .

- 1) Chứng tỏ rằng hàm  $f(x)$  khả tích trên khoảng  $(0, \frac{\pi}{2})$
- 2) Chứng tỏ rằng hàm  $g(x)$  liên tục trên miền  $D$
- 3) Chứng tỏ rằng  $\int_0^{\pi/2} f(x) dx = \frac{\pi}{4} g(-1)$
- 4) Tính tích phân  $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$

**Câu III** Xét chuỗi lũy thừa thực

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ trong đó } a_n = \arcsin\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) - \arcsin\left(\frac{n-1}{2n-1}\right)$$

1) Chứng tỏ rằng  $a_n = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{2n}{4n^2-1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2) Tìm miền hội tụ của chuỗi

**Câu IV** Xét phương trình vi phân

$$y'' + y = |x^2 - \pi^2| \quad (*)$$

1) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

2) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình (\*)

3) Tìm nghiệm cực đại của phương trình (\*) thỏa mãn điều kiện

$$y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 0$$

**C. XÁC SUẤT (10 điểm)**

**Câu V** Có 3 lớp học. Lớp 1 có  $a_1$  nam,  $b_1$  nữ; lớp 2 có  $a_2$  nam,  $b_2$  nữ; lớp 3 có  $a_3$  nam,  $b_3$  nữ. Giờ ra chơi, một học sinh từ lớp 1 chạy sang lớp 2, sau đó một học sinh từ lớp 2 chạy sang lớp 3. Cuối cùng, một học sinh từ lớp 3 chạy ra.

1) Tính xác suất học sinh từ lớp 1 chạy sang lớp 2 là nam

2) Tính xác suất học sinh từ lớp 2 chạy sang lớp 3 là nam

3) Tính xác suất học sinh từ lớp 3 chạy ra là nam