

ĐỀ THI PHÂN NGÀNH NĂM 2012

Môn: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút

**Phần I: ĐẠI SỐ (3,5 điểm)**

**Câu 1: (1,5 điểm)**

Ký hiệu  $P_2[x]$  là không gian các đa thức hệ số thực có bậc  $\leq 2$ . Cho toán tử tuyến tính  $f: P_2[x] \rightarrow P_2[x]$  có ma trận của nó xét theo cơ sở

$$B = \{v_1 = 1 + x; v_2 = 1 - x; v_3 = x^2\} \text{ của } P_2[x] \text{ là } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & m \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a, Hãy xác định một cơ sở và số chiều của  $\text{Ker}(f)$  theo tham số  $m$ ?

b, Cho trước  $m = 1$  hãy

i, Tìm một cơ sở của  $P_2[x]$  để ma trận của  $f$  xét theo cơ sở này có dạng đường chéo?

ii, Xác định ma trận của toán tử  $f$  theo cơ sở chính tắc của  $P_2[x]$ ?

**Câu 2: (2 điểm)**

Cho  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  trong đó  $a_n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$  và với  $A \in M_n(\mathbb{R})$  định nghĩa  $p(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_nA^n$

a, Giả sử  $\lambda$  là một trị riêng của  $A$ , chứng minh rằng  $p(\lambda)$  là một trị riêng của  $p(A)$ ?

b, Giả sử  $A$  là ma trận chéo hóa được, chứng minh rằng  $p(A)$  cũng chéo hóa được

c, Giả sử  $A$  là ma trận chéo hóa được và  $p(x)$  là đa thức đặc trưng của  $A$ . Tính  $p(A)$ ?

**Phần II: Xác Suất (2,5 điểm)**

Một hãng bảo hiểm chia khách hàng đến ký bảo hiểm tại nạn giao thông thành hai nhóm: nhóm I gồm những khách hàng dễ mắc tai nạn giao thông và nhóm II gồm những khách hàng không dễ mắc tai nạn giao thông. Theo thống kê thì xác suất mắc phải tai nạn giao thông trong 1 năm của nhóm I

là 40% trong khi đó tỷ lệ này của nhóm II chỉ là 20% và có tới 30% số khách hàng ký bảo hiểm trên là thuộc nhóm I.

- Tìm xác suất để một khách hàng đã ký bảo hiểm bị tai nạn giao thông trong năm hợp đồng bảo hiểm có hiệu lực ?
- Nếu giả thiết có một khách hàng của hãng bảo hiểm bị tai nạn. Tìm xác suất để người khách hàng này thuộc nhóm I ?
- Tìm xác suất để một khách hàng đã gia hạn hợp đồng bảo hiểm với hãng bảo hiểm cho năm thứ hai sẽ bị tai nạn trong năm đó khi giả thiết là người này đã bị tai nạn trong năm đầu ký hợp đồng bảo hiểm ?

### Phần III: Giải Tích (4 điểm)

#### Câu 1: (1,25 điểm)

Cho  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm số xác định bởi:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x + y + z)^n \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \text{nếu } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

- Chứng minh rằng với  $n \geq 1$  thì  $f$  là hàm liên tục tại  $(0, 0, 0)$  ?
- Chứng minh rằng  $f$  là khả vi tại  $(0, 0, 0)$  khi và chỉ khi  $n \geq 2$  ?
- Tìm điều kiện cần và đủ để  $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$

#### Câu 2: (2 điểm)

Cho  $I = \iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$

- Tính  $I$  với  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$
- Chuyển sang hệ tọa độ cực và chứng tỏ rằng:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2 \cos^2 \varphi)}{2 \cos 2\varphi} d\varphi$
- Đặt  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2 \sin^2 \varphi)}{2 \cos 2\varphi} d\varphi$  và khảo sát sự hội tụ của  $J$  ?
- Chứng minh rằng  $I + J$  và  $I - J$  có thể biểu diễn như hàm của

$$K = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt \text{ và từ đó suy ra giá trị của } K$$

#### Câu 3: (0,75 điểm)

Giải phương trình vi phân sau:  $(y^{(3)})^2 = 4y''$