

Họ và tên thí sinh: .....Số báo danh:.....

**Câu I (3 điểm)** Cho  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Kí hiệu

$$E(a, b) = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+3} = a.x_{n+2} + b.x_n \}$$

$$A(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

- 1) Chứng tỏ rằng  $E(a, b)$  là  $\mathbb{R}$  – không gian
- 2) Tìm một cơ sở của không gian  $E(a, b)$
- 3) Tìm trị riêng, vectơ riêng của ma trận  $A(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6})$
- 4) Chéo hóa ma trận  $A(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6})$
- 5) Suy ra giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  với  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6})$
- 6) Biện luận tính khả chéo của ma trận  $A(a, b)$

**Câu II (1.5 điểm)** Cho hàm

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

và miền  $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0 \}$

- 1) Khảo sát tính chất  $C^1$  của hàm  $f$
- 2) Tìm trị lớn nhất, trị bé nhất của hàm  $f$  trên miền  $D$
- 3) Tính tích phân  $\iint_D f(x, y) dx dy$

**Câu III** (2 điểm)

1) Cho  $a \in \mathbb{R}$  và hàm  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln x}{1-x^a}$

a) Chứng minh rằng hàm  $f$  khả tích trên khoảng  $(0, 1)$  với mọi  $a > 0$

b) Tính tích phân  $\int_0^1 f(x)dx$  với  $a = 1$

2) Cho chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \arccos \left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \right) z^n$

a) Tìm bán kính hội tụ của chuỗi

b) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi tại các điểm biên

**Câu IV** (1.5 điểm) Cho phương trình vi phân

$$y'' + y = \left| x - \frac{\pi}{2} \right| + \left| x + \frac{\pi}{2} \right|$$

1) Giải phương trình vi phân

2) Tìm nghiệm cực đại của câu 1) thỏa  $y(0) = \pi$  và  $y'(0) = 0$

**Câu V** (2 điểm) Cho  $X$  là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân phối

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \leq -A \\ u + v \cdot \arcsin\left(\frac{t}{A}\right) & \text{khi } t \in (-A, A) \\ 1 & \text{khi } t \geq A \end{cases}$$

trong đó  $A > 0$  là hằng số,  $u$  và  $v$  là tham số.

1) Xác định các tham số  $u$  và  $v$  để hàm  $F(t)$  liên tục

2) Tính xác suất  $P\left(-\frac{A}{2} < t < A\right)$

3) Tính hàm mật độ phân phối  $f(t)$  của biến ngẫu nhiên  $X$

4) Tính kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên  $X$